Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung $F\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^3$,

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x^2y^3 \\ \log(y) \\ x+y \end{pmatrix},$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Lösung: F ist als Verkettung auf offenen Mengen differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar. Damit ist F nach Satz 2.25 auch partiell differenzierbar und die Jacobimatrix ist gegeben durch $Df(x)=(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{ij}$. Also existiert die Jacobimatrix für alle $(x,y)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ und ist für beliebiges (x_0,y_0) gegeben durch:

$$DF(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x^2y^3}{\partial x} & \frac{\partial x^2y^3}{\partial y} \\ \frac{\partial \log(y)}{\partial x} & \frac{\partial \log(y)}{\partial y} \\ \frac{\partial x+y}{\partial x} & \frac{\partial x+y}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_0y_0^3 & 3x_0^2y_0^2 \\ 0 & \frac{1}{y_0} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

T2. Sei $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ die Funktion $f(x,y,z)=x^2\sin(yz^3)$. Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z).$$

Was ist $\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}(x,y,z)$?

Lösung: f ist als Verkettung bzw. Produkt differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar. Damit sind Ketten- und Produktregel anwendbar:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)=\partial_x\partial_z\partial_y x^2\sin(yz^3)\overset{\text{Kettenregel}}{=}\partial_z\partial_x x^2\cos(yz^3)z^3=$$
$$\partial_z 2x\cos(yz^3)z^3\overset{\text{Kettenregel, Produktregel}}{=}2x\cdot((-1)\sin(yz^3)\cdot 3yz^2\cdot z^3+\cos(yz^3)\cdot 3z^2)=$$
$$6xz^2(\cos(yz^3)-yz^3\sin(yz^3))$$

Satz von Schwarz (2.17) besagt, dass bei zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen die Reihenfolge der Ableitungen beliebig wählbar ist. Da Ableitungen von $x^2\sin(yz^3)$ stets wieder Produkte, Summen und Verkettungen von differenzierbaren Funktionen sind, ist f sogar beliebig oft differenzierbar (und damit auch zweimal). Damit gilt:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(x,y,z)$$

T3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0, \end{cases}$$

in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine auf einem offenen Definitionsbereich definierte Funktion per Definition genau dann in $x \in D = \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten in jeder Koordinatenrichtung existiert. Sei also $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ beliebig, dann ist die partielle Ableitung in x-Richtung analog zu der aus Analysis 1 bekannten Ableitung (da y_0 zwar beliebig, aber fest ist und der Nenner der Funktion ungleich null ist). Entsprechendes gilt für die y-Richtung und damit ist für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ die Quotientenregel anwendbar:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y)|_{(x_0,y_0)} &= \tfrac{(x_0^2+y_0^2)y_0^2 - x_0 y_0^2 \cdot 2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \tfrac{y_0^2(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)} \\ \partial_y f(x,y)|_{(x_0,y_0)} &= \tfrac{(x_0^2+y_0^2)2x_0y_0 - x_0 y_0^2 \cdot 2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \tfrac{2x_0^3 y_0}{(x_0^2+y_0^2)} \end{aligned}$$

Noch zu zeigen bleibt damit die partielle Differenzierbarkeit in $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y)|_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f((0,0)+he_1) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \\ &\lim_{h\to 0} \tfrac{\frac{h\cdot 0^2}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{0}{h} = 0 \\ \partial_y f(x,y)|_{(0,0)} &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f((0,0)+he_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \\ &\lim_{h\to 0} \tfrac{\frac{0\cdot h^2}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \tfrac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Damit existiert der Grenzwert in x- und in y-Richtung für alle Elemente in $\mathbb{R}^2$ und die partielle Differenzierbarkeit auf ganz $\mathbb{R}^2$ ist gezeigt.